ベクトル演算

高 杉

単位ベクトル表示

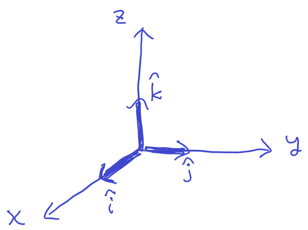
ベクトルは大きさと方向をもつ量である。物体の位置、速度、加速度といった物理量はベクトルで表され、ベクトル量とよばれる。ベクトルは矢印で表される。ベクトルの座標軸への射影を座標成分とよぶ。大きさが 1 のベクトルを単位ベクトルという。x 軸、y 軸、z 軸方向の単位ベクトルをそれぞれ $\hat{i}$、$\hat{j}$、$\hat{k}$ とする。ベクトル $\vec{a}$ の x 成分、y 成分、z 成分をそれぞれ a_x、a_y、a_z とするとき、単位ベクトルを用いて、

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

と表される。ベクトルの絶対値はその成分を用いて、

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

と表される。



加算・定数倍

2 つのベクトルの加算は矢印をつなぎ合わせたものになる。単位ベクトル表示された 2 つのベクトル

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$
$$\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

の加算は成分ごとに加算をしたものになる。

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$$

定数倍すると矢印の長さを定数倍したものになる。定数を c とするとき、

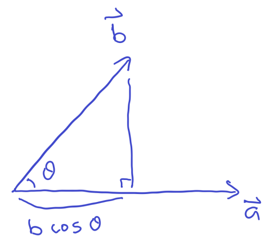
$$c\vec{a} = ca_x\hat{i} + ca_y\hat{j} + ca_z\hat{k}$$

スカラー積 (内積)

ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のスカラー積を

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

で定義する。ここで a と b はそれぞれ $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の絶対値で、θ はそれぞれのベクトルのなす角度である。



単位ベクトル同士のスカラー積は

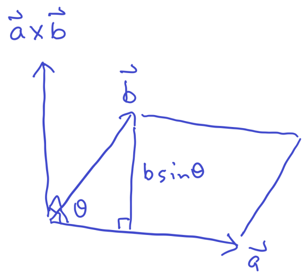
$$
\begin{aligned}
&\hat{i}\cdot\hat{i}=1 \qquad &&\hat{i}\cdot\hat{j}=0 \qquad &&\hat{i}\cdot\hat{k}=0\\
&\hat{j}\cdot\hat{i}=0 &&\hat{j}\cdot\hat{j}=1 &&\hat{j}\cdot\hat{k}=0\\
&\hat{k}\cdot\hat{i}=0 &&\hat{k}\cdot\hat{j}=0 &&\hat{k}\cdot\hat{k}=1
\end{aligned}
$$

となる。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\cdot\vec{b} &= (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\cdot(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})\\
&= a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z
\end{aligned}
$$

となる。

ベクトル積 (外積)



ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のベクトル積を $\vec{c}$ とする。

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$

$\vec{c}$ の大きさは

$$c=ab\sin\theta$$

で、方向は $\vec{a}$ から $\vec{b}$ へ右ねじを回したときにねじが進む方向であると定義する。ここで θ は $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度である。c の大きさは $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の張る平行四辺形の面積に等しい。

単位ベクトル同士のベクトル積は

$$
\begin{aligned}
&\hat{i}\times\hat{i}=0 \qquad &&\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k} \qquad &&\hat{i}\cdot\hat{k}=-\hat{j}\\
&\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k} &&\hat{j}\times\hat{j}=0 &&\hat{j}\cdot\hat{k}=\hat{i}\\
&\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} &&\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i} &&\hat{k}\cdot\hat{k}=0
\end{aligned}
$$

となる。これを用いると、

$$
\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{b} &= (a_x\hat{i}+a_y\hat{j}+a_z\hat{k})\times(b_x\hat{i}+b_y\hat{j}+b_z\hat{k})\\
&= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}\\
&= (a_yb_z-b_ya_z)\hat{i}+(a_zb_x+b_za_x)\hat{j}+(a_xb_y+b_xa_y)\hat{k}
\end{aligned}
$$

となる。