Newton の球殻定理

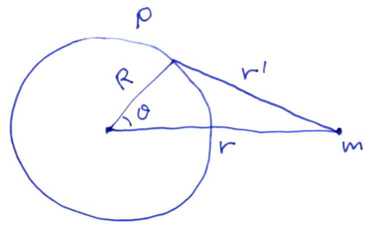
高 杉

球殻と質点のポテンシャルエネルギー

半径 R、厚さ dR、密度 ρ の薄い球殻を考える。この球殻の中心から距離 r だけ離れた質量 m の物体にはたらく重力のポテンシャルエネルギーを求める。球殻の体積要素は $dV = R^2 \sin\theta dRd\theta d\phi$ である。ポテンシャルエネルギーは

$$dU = -\frac{Gm\rho}{r'} R^2 \sin\theta dRd\theta d\phi$$

ここで r' は体積要素と質点の間の距離である。余弦定理より



$$r'^2 = R^2 + r^2 - 2Rr\cos\theta$$

また

$$r'dr' = Rr\sin\theta d\theta$$

全体のポテンシャルエネルギーは

$$\begin{aligned} U &= -\int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \frac{Gm\rho}{r'} R^2 \sin\theta dR \\ &= -\int_0^\pi d\theta \frac{2\pi Gm\rho}{r'} R^2 \sin\theta dR \\ &= -\int dr' \frac{2\pi Gm\rho}{r} RdR \end{aligned}$$

物体が球殻の外部にあるとき $(r > R)$

$\theta = 0 \to \pi$ と変化するとき、$r' = r - R \to r + R$ と変化する。

$$\begin{aligned} U &= -\int_{r-R}^{r+R} dr' \frac{2\pi Gm\rho}{r} RdR \\ &= -\frac{Gm}{r} 4\pi\rho R^2 dR \\ &= -\frac{GmM}{r} \end{aligned}$$

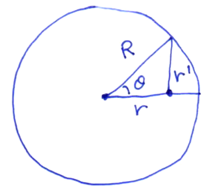
ここで $M = 4\pi\rho R^2 dR$ は球殻の質量であり、質量が球殻中心に集中しているときのポテンシャルエネルギーと同じであることを示している。重力は

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{GmM}{r^2}$$

となる。

物体が球殻の内部にあるとき $(r < R)$

$\theta = 0 \to \pi$ と変化するとき、$r' = R - r \to R + r$ と変化する。



$$
\begin{aligned}
U &= -\int_{R-r}^{R+r} dr' \frac{2\pi G m \rho}{r} R dR \\
&= -4\pi G M \rho R dR \\
&= -\frac{GmM}{R}
\end{aligned}
$$

ポテンシャルエネルギーは質点が球殻上 R にあるときと同じで、定数となる。重力は

$$
F = -\frac{dU}{dr} = 0
$$

となり、力が打ち消しあってはたらかなくなることを示している。