

三角関数の積分

高杉

Sin x、Cos x の積分

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x$$
$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$$

より

$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

定積分は

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -[\cos x]_0^{\pi} = 2$$
$$\int_0^{\pi} \cos x dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0$$

のように求められる。

置換積分

合成関数の微分の逆演算である。 $x = g(t)$ であるとき

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

のように積分を変換することができる。

置換積分の例

- 不定積分

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

を求める。

$x = a \sin \theta$ とおくと

$$dx = a \cos \theta d\theta$$

である。これから

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \int \cos^2 \theta d\theta \\ &= a^2 \int \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= a^2 \left(\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} + C \right)\end{aligned}$$

となる。

また、定積分

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

を求める。

$x = a \sin \theta$ とおくと、 $x = 0 \rightarrow a$ と変化するとき、 $\theta = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}$ と変化する。

$$\begin{aligned}\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= a^2 \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} a^2\end{aligned}$$

となる。

• 不定積分

$$\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

を求める。

$\cos \theta = t$ とおくと

$$-\sin \theta d\theta = dt$$

である。これから

$$\begin{aligned}\int \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= - \int t^2 dt \\ &= - \left(\frac{t^3}{3} + C \right) \\ &= - \left(\frac{\cos^3 \theta}{3} + C \right)\end{aligned}$$

となる。

また、定積分

$$\int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

を求める。

$\cos \theta = t$ とおくと、 $\theta = 0 \rightarrow \pi$ と変化するとき、 $t = 1 \rightarrow -1$ と変化する。

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta &= - \left[\frac{t^3}{3} \right]_1^{-1} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。