Newton 方程式の解

高 杉

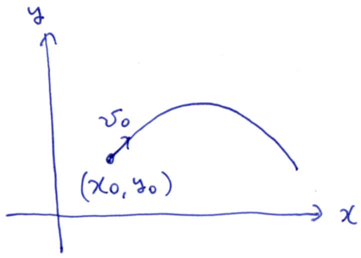
重力がはたらくとき

水平方向を x、鉛直上向きを y とし、$x-y$ 平面内の運動を考える。質量 m の物体にはたらく重力を $\vec{F}=-mg\hat{j}$ とする。運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{F}=-mg\hat{j}$$

x,y 成分はそれぞれ

$$\frac{d^2x}{dt^2}=0$$
$$\frac{d^2y}{dt^2}=-g$$



積分すると

$$x=x_0+v_{0x}t$$
$$y=y_0+v_{0y}t-\frac{1}{2}gt^2$$

ここで $\vec{r}_0=x_0\hat{i}+y_0\hat{j}$ は初期位置、$\vec{v}_0=v_{0x}\hat{i}+v_{0y}\hat{j}$ は初速度である。時間 t を消去すると

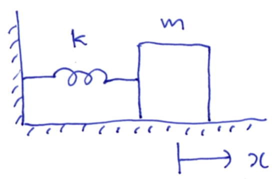
$$\begin{aligned}y-y_0&=(x-x_0)\frac{v_{0y}}{v_{0x}}-\frac{1}{2}g\frac{(x-x_0)^2}{v_{0x}^2}\\&=(x-x_0)\left\{\frac{v_{0y}}{v_{0x}}-\frac{g(x-x_0)}{2v_{0x}^2}\right\}\end{aligned}$$

となる。

ばねの力がはたらくとき

ばね定数 k のばねに取り付けられた質量 m の物体の一次元の運動を考える。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=F=-kx$$



となる。

$$\frac{d}{dt}\sin\omega(t-t_0)=\omega\cos\omega(t-t_0)$$
$$\frac{d}{dt}\cos\omega(t-t_0)=-\omega\sin\omega(t-t_0)$$

であることから

$$x=x_0\cos\omega(t-t_0)$$

ただし x_0 は振幅、t_0 は初期位相を決める基準時刻、

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

ω は角振動数である。

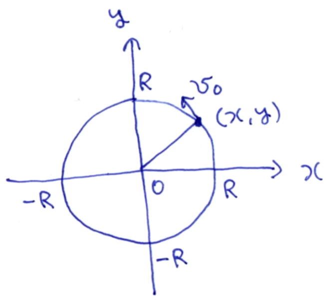
向心力がはたらくとき

質量 m の物体の運動に対して、次のような向心力がはたらく場合を考える。運動方程式は

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$$

ω はある定数としておく。x, y 成分はそれぞれ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega^2 y$$



これから

$$x = R\cos\omega(t - t_0)$$
$$y = R\sin\omega(t - t_0)$$

となり、半径 R の円を描くことがわかる。また

$$v_x = -v_0\sin\omega(t - t_0)$$
$$v_y = v_0\cos\omega(t - t_0)$$

が求められる。ω は角振動数である。また、$v_0 = R\omega$ は速さである。ω が正のとき左回り、負のとき右回りに回転する。改めて向心力は

$$\vec{F} = -\frac{mv_0^2}{R^2}\vec{r} = -\frac{mv_0^2}{R}\hat{r}$$

となることがわかる。ここで $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{R}$ は半径方向の単位ベクトルである。