

慣性モーメント

高杉

計算方法

慣性モーメントは

$$I = \int \rho r'^2 dV$$

ここで r' は回転軸からの距離である。質量密度を ρ とすると、質量は

$$M = \int \rho dV$$

で求められる。体積要素は

$$dV = dx dy dz \quad (\text{直交座標})$$

$$= r dr d\theta dz \quad (\text{円筒座標})$$

$$= r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \quad (\text{球座標})$$

である。

(a) 輪 (中心軸)

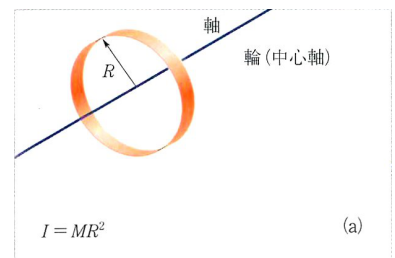
円筒座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iint \rho R d\theta dz = \rho R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= 2\pi \rho R L \end{aligned}$$

$r' = r = R$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iint \rho R^3 d\theta dz = \rho R^3 [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= 2\pi \rho R^3 L \\ &= MR^2 \end{aligned}$$

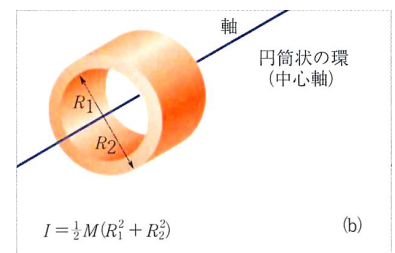
となる。



(b) 円筒状の環 (中心軸)

円筒座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho r dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_{R_1}^{R_2} [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= \pi \rho (R_2^2 - R_1^2) L \end{aligned}$$



$r' = r$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_{R_1}^{R_2} [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho (R_2^4 - R_1^4) L \\ &= \frac{1}{2} M (R_1^2 + R_2^2) \end{aligned}$$

となる。

(c) 円筒状の剛体棒 (中心軸)

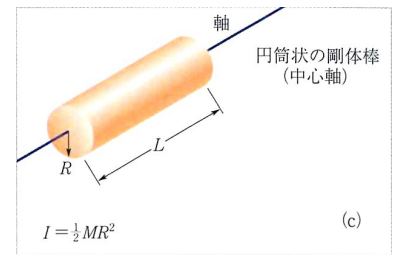
円筒座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho r dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= \pi \rho R^2 L \end{aligned}$$

$r' = r$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iiint \rho r^3 dr d\theta dz = \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} [z]_0^L \\ &= \frac{1}{2} \pi \rho R^4 L \\ &= \frac{1}{2} M R^2 \end{aligned}$$

となる。



(d) 円筒状の剛体棒 (長さ方向の中心を通る軸)

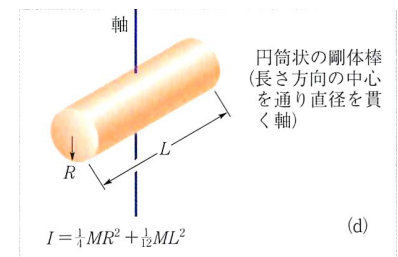
円筒座標を用いる。質量は (c) と同じ。

$$M = \pi \rho R^2 L$$

$r'^2 = x^2 + z^2$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iiint \rho (x^2 + z^2) r dr d\theta dz = \rho \iiint (r^3 \cos^2 \theta + z^2 r) dr d\theta dz \\ &= \rho \iiint \left(r^3 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} + z^2 r \right) dr d\theta dz \\ &= \rho \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^R [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4} \rho R^4 L + \frac{\pi}{12} \rho R^2 L^3 \\ &= \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 \end{aligned}$$

となる。

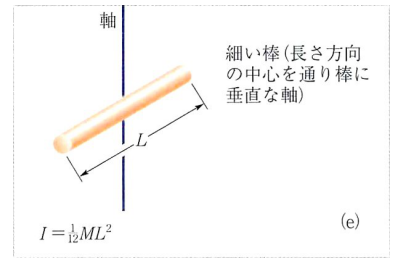


(e) 円筒状の剛体棒 (長さ方向の中心を通る軸)

(d) の $R \ll L$ の場合である。慣性モーメントは

$$I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2 \approx \frac{1}{12}ML^2 \quad (R \ll L)$$

となる。



(f) 剛体球 (直径を通る軸)

球座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \rho \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R [-\cos \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{4}{3}\pi \rho R^3 \end{aligned}$$

$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$I = \iiint \rho (x^2 + y^2) r^2 dr d\theta d\phi = \rho \iiint r^4 \sin^3 \theta dr d\theta d\phi$$

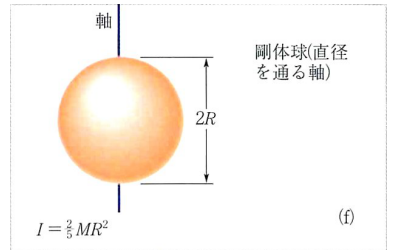
ここで

$$\begin{aligned} \int \sin^3 \theta d\theta &= \int (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \\ &= \int (t^2 - 1) dt \quad (\cos \theta = t \text{ とおいた}) \\ &= \frac{t^3}{3} - t \end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned} I &= \rho \left[\frac{r^5}{5} \right]_0^R \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{-1} [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8}{15}\pi \rho R^5 \\ &= \frac{2}{5}MR^2 \end{aligned}$$

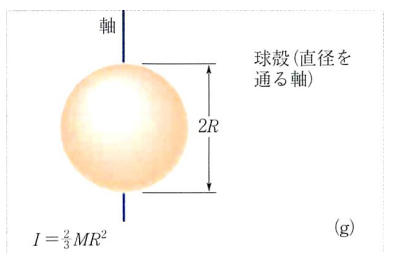
となる。



(g) 球殻 (直径を通る軸)

球座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iiint \rho R^2 \sin \theta d\theta d\phi = \rho R^2 [-\cos \theta]_0^\pi [\phi]_0^{2\pi} \\ &= 4\pi \rho R^2 \end{aligned}$$



$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iint \rho(x^2 + y^2)R^2 \sin\theta d\theta d\phi = \rho R^4 \iint \sin^3\theta d\theta d\phi \\ &= \rho R^4 \left[\frac{t^3}{3} - t \right]_1^{-1} [\phi]_0^{2\pi} \\ &= \frac{8}{3}\pi\rho R^4 \\ &= \frac{2}{3}MR^2 \end{aligned}$$

となる。

(h) 輪 (直径を通る軸)

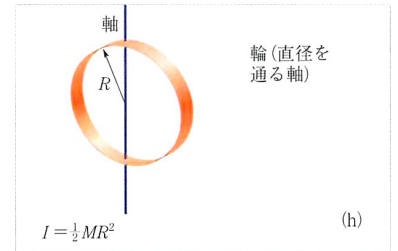
円筒座標を用いる。質量は (a) と同じ。

$$M = 2\pi\rho RL$$

$r'^2 = x^2 + z^2$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iiint \rho(x^2 + z^2)Rd\theta dz = \rho R \iiint \left(R^2 \frac{\cos 2\theta + 1}{2} + z^2 \right) d\theta dz \\ &= \rho R^3 \left[\frac{\sin 2\theta}{4} + \frac{\theta}{2} \right]_0^{2\pi} [z]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} + \rho R [\theta]_0^{2\pi} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\pi\rho R^3 L + \frac{3}{2}\pi\rho RL^3 \\ &= \frac{1}{2}MR^2 + \frac{3}{4}ML^2 \\ &\approx \frac{1}{2}MR^2 \quad (R \gg L) \end{aligned}$$

となる。



(i) 長方形の板 (長方形の中心を通る軸)

直交座標を用いる。質量は

$$\begin{aligned} M &= \iint \rho dx dy = \rho [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ &= \rho ab \end{aligned}$$

$r'^2 = x^2 + y^2$ である。慣性モーメントは

$$\begin{aligned} I &= \iint \rho(x^2 + y^2) dx dy = \rho \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [y]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} + \rho [x]_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left[\frac{y^3}{3} \right]_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \\ &= \frac{1}{12}\rho a^3 b + \frac{1}{12}\rho ab^3 \\ &= \frac{1}{12}M(a^2 + b^2) \end{aligned}$$

となる。

