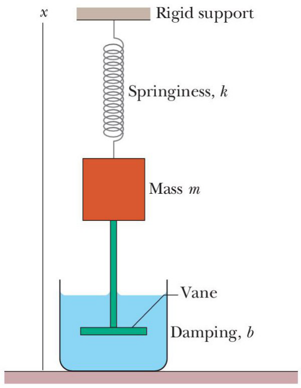
減衰振動

高 杉

振動の方程式

質量 m、ばね定数 k の振動子に減衰定数 b をもつ減衰力を加える。運動方程式は

$$m\frac{d^2x}{dx^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$



となる。 解の形を

$$x = e^{\lambda t}$$

とおくと

$$\frac{dx}{dt} = \lambda x$$
$$\frac{d^2x}{dt^2} = \lambda^2 x$$

より

$$m\lambda^2 + b\lambda + k = 0$$

が得られる。この解は

$$\lambda = \frac{1}{2m}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}\right)$$

である。

減衰振動

$b^2 < 4mk$ のとき、ルートの中が負になり虚数となる。

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm i\omega$$

と表される。ここで

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

である。解は 2 つの解の線形結合で表される。

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{i\omega t} + c_2 e^{-\frac{b}{2m}t} e^{-i\omega t} \\ &= e^{-\frac{b}{2m}t} \{(c_1 + c_2)\cos\omega t + i(c_1 - c_2)\sin\omega t\} \\ &= c e^{-\frac{b}{2m}t} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

となり、$b > 0$ であれば振幅は指数関数的に減少する。

過減衰

$b^2 > 4mk$ のとき、ルートの中が正であるので振動しない。

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \gamma$$

となる。ここで

$$\gamma = \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

である。解は 2 つの解の線形結合で表される。

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 e^{-(\frac{b}{2m} - \gamma)t} + c_2 e^{-(\frac{b}{2m} + \gamma)t} \end{aligned}$$

となる。

臨界減衰

$b^2 = 4mk$ のとき、重根となる。

$$\lambda = -\frac{b}{2m}$$

となる。このときの解は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= (c_1 + c_2 t)e^{\lambda t} \\ &= (c_1 + c_2 t)e^{-\frac{b}{2m}t} \end{aligned}$$