# 簡単化の方法

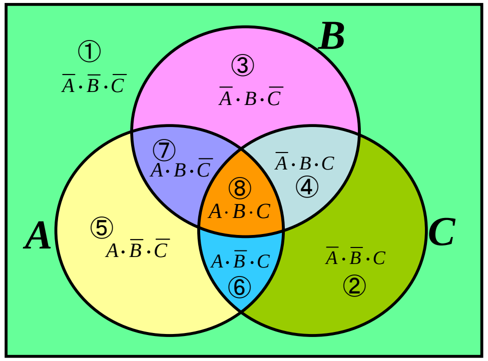
（1）ブール代数の公式を使う方法
（2）カルノー図を使う方法
（3）禁止項を利用する方法



## ● カルノー図を利用する方法

**カルノー図とは　：　平面図上に規則的に全ての最小項を表示した図.**
**論理式の簡単化を視覚的に行うときに使う図.**

ベン図とカルノー図の対比　3変数の場合




| AB \ C | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 0 | ① $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$ | ② $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$ |
| 0 1 | ③ $\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$ | ④ $\bar{A}\cdot B\cdot C$ |
| 1 1 | ⑦ $A\cdot B\cdot\bar{C}$ | ⑧ $A\cdot B\cdot C$ |
| 1 0 | ⑤ $A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$ | ⑥ $A\cdot\bar{B}\cdot C$ |



## カルノー図のかきかた

- 変数を縦軸，横軸に割り当てる
- 真に1，偽に0を対応させ，変数の値の組み合わせの数だけ書き並べる.
- 縦軸，横軸の変数の組み合わせの配列は，隣同士の升目の間では 1個 の変数しか真と偽が変わらないようにする．これは図の上端と下端，左端と右端の間でも成り立つようにする.

升目の数は $2^n$ 個.

| A | |
|---|---|
| 0 | $\bar{A}$ |
| 1 | $A$ |

1変数

| A \ B | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | $\bar{A}\cdot\bar{B}$ | $\bar{A}\cdot B$ |
| 1 | $A\cdot\bar{B}$ | $A\cdot B$ |

2変数

| AB \ C | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 0 | $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$ | $\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C$ |
| 0 1 | $\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}$ | $\bar{A}\cdot B\cdot C$ |
| 1 1 | $A\cdot B\cdot\bar{C}$ | $A\cdot B\cdot C$ |
| 1 0 | $A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}$ | $A\cdot\bar{B}\cdot C$ |

3変数

| AB \ CD | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | | | |
| 0 1 | | | | |
| 1 1 | | | | |
| 1 0 | | | | |

4変数



## 真理値表からカルノー図をかく（4変数の場合）

| $A$ | $B$ | $C$ | $D$ | $f(A, B, C, D)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

(I) 真理値表から加法標準形を使って論理式を書く

$$f=\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot D+\bar{A}\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D+\bar{A}\cdot B\cdot\bar{C}\cdot D+A\cdot\bar{B}\cdot\bar{C}\cdot\bar{D}+A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot\bar{D}+A\cdot\bar{B}\cdot C\cdot D$$

(II) 4 変数のカルノー図をかき，求めた論理式の各項に該当する升目に "1" を書き込む.

| AB \ CD | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | 1 | |
| 0 1 | | 1 | | |
| 1 1 | | | | |
| 1 0 | 1 | | 1 | 1 |

## カルノー図による簡単化

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | ① 1 | 1 ② | |
| 01 | | 1 | | |
| 11 | | | | |
| 10 | ③ 1 | | 1 | 1 |

左図のようにペアーを作る

論理和をとる

カルノー図の隣接する升目の間ではどれか1つの変数の真と偽のみが変わる.

$\overline{X}+X=1$ を利用

① $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$

② $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D=\overline{B}\cdot C\cdot D$

③ $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}=A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$

$$f=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{B}\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$$



他のペアリングではどうなるか. . .

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | 1 ② | |
| 01 | | ① 1 | | |
| 11 | | | | |
| 10 | ③ 1 | | ④ 1 | 1 |

① $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$

② $\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D$

③ $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}=A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}$

④ $A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}=A\cdot\overline{B}\cdot C$

$\overline{X}+X=1$

$$f=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C$$

**前のやり方より最小項の数が多い ← やり方が悪い**

**一般に,「囲み」の数が少なくなるようにすると,より簡単な論理式が求まる.**



縦方向または横方向の隣接する 4個 の升目に 1 が並ぶ場合は非共通の2変数が消去される.

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | |
| 01 | | 1 | | |
| 11 | | 1 | | |
| 10 | | 1 | | |

$$\begin{aligned}&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D\\&=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot(\overline{B}+B)+A\cdot\overline{C}\cdot D\cdot(B+\overline{B})\\&=(\overline{A}+A)\cdot\overline{C}\cdot D\\&=\overline{C}\cdot D\end{aligned}$$

正方形をなす 4つの升目に 1 があるとき, 非共通項の 2変数 が消去される.

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | 1 | |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | | | |
| 10 | | | | |

$$\begin{aligned}&\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D\\&=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D\cdot(\overline{B}+B)+\overline{A}\cdot C\cdot D\cdot(\overline{B}+B)\\&=(\overline{C}+C)\cdot\overline{A}\cdot D\\&=\overline{A}\cdot D\end{aligned}$$



正方形をなす 8 つの升目に 1 があるとき, 非共通項の 3 変数 が消去される.

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | 1 | |
| 01 | | 1 | 1 | |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | 1 | 1 | |

D

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | 1 | 1 |
| 01 | | | 1 | 1 |
| 11 | | | 1 | 1 |
| 10 | | | 1 | 1 |

C

例

$\overline{C}\cdot D$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | | 1 | 1 | |
| 10 | | 1 | 1 | |

$\overline{A}\cdot B$

$A\cdot D$

$$f = A\cdot D + \overline{A}\cdot B + \overline{C}\cdot D$$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 01 | 1 | | | 1 |
| 11 | 1 | | | 1 |
| 10 | 1 | 1 | 1 | 1 |

$$f = \overline{B} + \overline{D}$$



## カルノー図を使った簡単化の手順のまとめ

(1) “孤立の 1 ” を全て○で囲む

(2) “4 個の 1” とは隣接しない “隣接する 2 個の 1 組” を全て○で囲む

(3) “8 個の 1” とは隣接しない “隣接する 4 個の 1 組” を全て○で囲む

(4) “8 個以上の 隣接する 1 の組” について同様に進める.

(注) **なるべく○ の数を減らすように**, 上記の作業を行う.

(5) ○で囲んだ各組内で簡単化を行い, それらの論理和をとる.



## 簡単化の方法

（1） ブール代数の公式を使う方法
（2） カルノー図を使う方法
（3） 禁止項を利用する方法

今までは、論理関数は全ての論理変数の組み合せに対して 1 又は 0 の値が定まっていた. しかし, 実際には論理変数の特定の組み合わせが許されない場合があり, この時は論理変数は不確定となる.

このような禁止されている論理変数の組み合わせに対応する最小項のことを禁止項(または don’t care項)という.

**禁止項の値は 1 でも 0 でもよく**, この性質を使って簡単化を行う.



例1） 4 変数の場合を考える.

論理式 $f = \overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot\overline{D} + \overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D + \overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D} + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D + A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$

ただし **$A$と $B$ は同時に 1 にはならないとする** → **$A\cdot B$ を含む項は禁止項**となる

（対応する升目に $\phi$ を入れる）.

禁止項であることを表す

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |
| 10 | | | 1 | 1 |

$\phi$ は 1 でも 0 でもよいが ここでは仮に全ての $\phi$ が 1 だとして簡単化を行う

$\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | 1 | | |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | | | 1 | 1 |

$B$

$A\cdot C$

よって

$$\boxed{f = \overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D + A\cdot C + B}$$

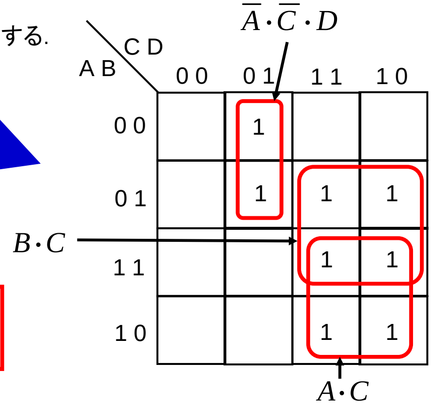
## 例2）

論理式　$f=\overline{A}\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot\overline{C}\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot D+\overline{A}\cdot B\cdot C\cdot\overline{D}+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot D+A\cdot\overline{B}\cdot C\cdot\overline{D}$

ただし $A\cdot B$ および $A\cdot\overline{B}\cdot\overline{C}\cdot\overline{D}$ が禁止項とする

| AB \ CD | 0 0 | 0 1 | 1 1 | 1 0 |
|---|---|---|---|---|
| 0 0 | | 1 | | |
| 0 1 | | 1 | 1 | 1 |
| 1 1 | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ | $\phi$ |
| 1 0 | $\phi$ | | 1 | 1 |

青色の $\phi$ のみを1とする.




よって

$$\boxed{f=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot D+A\cdot C+B\cdot C}$$